

加速器准直控制网数据处理误差累积研究

王小龙^{1,2,3} 康玲^{1,2} 董岚^{1,2} 李波^{1,2} 门玲鸽^{1,2} 罗涛^{1,2} 王铜^{1,2}
梁静^{1,2} 何振强^{1,2} 柯志勇^{1,2} 马娜^{1,2} 卢尚¹ 韩圆颖¹ 闫路平¹
张露彦¹ 刘晓阳¹ 闫皓月¹ 李春华¹ 吴蕾¹ 沈建新¹ 张晓辉¹

1(中国科学院高能物理研究所 北京 100049)

2(散裂中子源科学中心 东莞 523808)

3(中国科学院大学 北京 100049)

摘要 三维平差相比二维加一维平差具有更为严密的理论基础,但是将无约束的三维平差用于加速器准直控制网观测数据处理会出现严重的误差累积现象,致使平差结果严重扭曲变形。首先,从加速器控制网的布设方式、测量方式对三维平差数学模型进行分析,从理论上阐述了误差累积的来源和传播方式;然后,通过分析跟踪仪三维坐标测量模型、测点误差模型和模拟测量实验对跟踪仪测点精度特性、测网定位、定向精度特点和单站测量误差传播特点进行研究得出一系列结论,从原理上对加速器控制网三维平差高程和横向误差累积严重的现象做出了解释;最后,通过对直线控制网的模拟测量和平差计算对前述结论进行验证,并验证了两种误差累积的抑制方法,取得了很好的误差累积控制效果。

关键词 三维平差, 加速器准直控制网, 激光跟踪仪, 误差累积, 转站测量

中图分类号 TL505

DOI: 10.11889/j.0253-3219.2021.hjs.44.090201

Data processing error accumulation of accelerator alignment control network

WANG Xiaolong^{1,2,3} KANG Ling^{1,2} DONG Lan^{1,2} LI Bo^{1,2} MEN Lingling^{1,2} LUO Tao^{1,2}
WANG Tong^{1,2} LIANG Jing^{1,2} HE Zhenqiang^{1,2} KE Zhiyong^{1,2} MA Na^{1,2} LU Shang¹
HAN Yuanying¹ YAN Luping¹ ZHANG Luyan¹ LIU Xiaoyang¹ YAN Haoyue¹
LI Chunhua¹ WU Lei¹ SHEN Jianxin¹ ZHANG Xiaohui¹

1(Institute of High Energy Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

2(Spallation Neutron Source Science Center, Dongguan 523808, China)

3(University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract [Background] Compared with 2D+1D adjustment, three dimensional adjustment has a more rigorous theoretical basis. However, when the unconstrained three dimensional adjustment is applied to the observation values processing of the accelerator alignment control network, serious error accumulation will occur and resulting in obvious distortion of the results. [Purpose] This study aims to expound the ways and characteristics of three dimensional adjustment error accumulation for accelerator alignment control network. [Methods] Firstly, based on the layout of accelerator alignment control network and the moving station measurement method of laser tracker, the three dimensional adjustment mathematical model was analyzed, and the least-squares collocation theory was used to clearly explain the error propagation. Secondly, the characters of laser tracker measurement accuracy, station

国家自然科学基金(No.12075264)资助

第一作者: 王小龙, 男, 1975年出生, 2003年于河北工业大学获硕士学位, 研究方向为精密工程测量及粒子加速器准直测量

收稿日期: 2021-07-05, 修回日期: 2021-07-21

Supported by National Natural Science Foundation of China (No.12075264)

First author: WANG Xiaolong, male, born in 1975, graduated from Hebei University of Technology with a master's degree in 2003, focusing on precision engineering measurement and particle accelerator alignment

Received date: 2021-07-05, revised date: 2021-07-21

positioning and orientation accuracy and single station measurement error propagation were studied by analyzing the laser tracker 3D coordinate measurement model, measurement point error model and simulation measurement experiments. Finally, adjustment calculation of the linac control network was verified by simulation measurement, and two error accumulation suppression methods were tested. **[Results]** The source and propagation mode of error accumulation are explained theoretically, and verified by simulation calculation, so are the serious error accumulation of elevation and lateral errors in three dimensional adjustment of control network in accelerator. **[Conclusions]** Providing high-precision point coordinate constraint for three dimensional adjustment can effectively suppress error accumulation, and providing high-precision orientation constraint for station coordinate system can also achieve the effect of suppressing error accumulation.

Key words Three dimensional adjustment, Accelerator alignment control network, Laser tracker, Error accumulation, Move station measurement

随着科研需求的发展,新一代粒子加速器的规模相比过去有了显著增大。例如,我国已经建成的中国散裂中子源,其束线长度超过 600 m;正在建设的北京高能同步辐射光源,其储存环周长达到 1 400 m^[1];上海硬 X 射线自由电子激光装置总长超过了 3 km^[2]。与此同时,为了实现更小发射度、更高亮度,加速器物理对设备位置的准直精度提出了更为严格的要求,如北京高能同步辐射光源要求储存环相邻单元之间的准直精度达到 50 μm ^[3],上海硬 X 射线自由电子激光装置要求 400 m 长范围内的波荡器直线度达到 0.2 mm^[4]。要在这样大的范围实现设备的精确就位,就必须为其提供高精度的准直控制网数据,作为设备安装准直的位置参考基准^[5]。

用于设备安装和位置监测的准直控制网通常沿加速器隧道布设,采用激光跟踪仪用转站搭接的方法进行全局测量,观测数据经过平差计算得到全部控制网点在装置坐标系下的坐标^[6]。为了简化计算,控制误差累积,平差计算一般都是将观测数据平面方向和高程方向分开处理^[7],即二维加一维数据处理方法。这种二加一数据处理方法的缺陷是:割裂了三维坐标之间的关系,削弱了斜距观测值的控制能力;没有将三维观测数据统一在一个数学模型下处理,计算模型不严密;存在投影归化误差,计算带有近似性^[8-9]。但是采用三维平差计算时又发现数据处理结果存在严重的误差累积现象,如北京正负电子对撞机 240 m 储存环控制网,随测站数增加三维平差结果与水准测量数据相比高程方向点位误差可达 7 mm 以上;上海光源储存环控制网在 550 m 距离上,误差积累大于 16 mm,其中高程方向最为显著^[10]。但是将跟踪仪每一站测量数据与水准仪测量数据对比时,并没有发现两者存在明显差别^[11],也就是说跟踪仪高程测量不存在大误差,出现以上误差累积现象一方面是和转站搭接测量在传递空间几何位置关系的同时也会传递每一站的测量误差有关,

另一方面是和所用的三维数据处理方法没能有效抑制误差累积有关。本文对跟踪仪观测数据三维平差方法展开研究,通过理论分析和模拟计算,揭示在加速器测量环境中误差累积产生的原因和特点,为今后三维平差误差累积控制研究提供参考依据。

1 三维平差的数学模型分析

加速器控制网三维平差数据来源于跟踪仪观测值,根据观测值与待求参数之间的函数关系建立观测方程进行三维平差计算。观测方程与控制网的布设方式、测量方法和观测值类型都有密切关系,下面将分别进行简要介绍。

1.1 控制网测量

加速器隧道控制网通常沿隧道方向分段布设,如图 1 所示,在每一段截面控制点分别安装于隧道的墙面和地面。

跟踪仪采用转站搭接的方式测量控制网,其方法是:跟踪仪依次在相邻的两段控制网之间自由设站,置平仪器建立水平测站坐标系,每站向前向后各测量若干段控制网,得到各控制点在测站坐标系下的边角观测值或 X 、 Y 、 Z 坐标值。按照这种测量方式逐段推进,完成全网测量。相邻两站之间都有一定数量的公共测量点,形成测站与测站之间的搭接,实现空间位置关系传递。

1.2 三维平差数学模型

依照前述测量方式建立三维平差数学模型。设某一控制网包含有 n 个控制点,测量了 m 站, (X_i, Y_i, Z_i) 和 (X_{ki}, Y_{ki}, Z_{ki}) 分别表示某一控制点 i 在装置坐标系和第 k 测站坐标系中的坐标。 (X_k, Y_k, Z_k) 为第 k 测站坐标系原点即站点在装置坐标系中的坐标, $M(\theta_{xk}, \theta_{yk}, \theta_{zk})$ 为把装置坐标系变换到与第 k 测站坐标系坐标轴方向相同的旋转矩阵,则有如下函数关系成立:

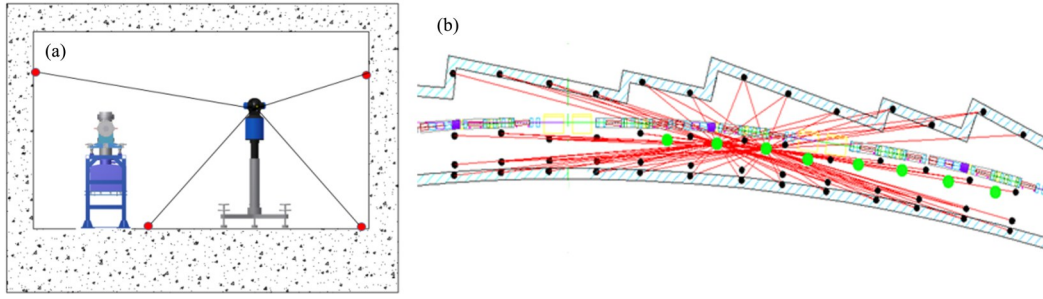


图1 控制网布设(a)和测量设置(b)

Fig.1 Control network layout (a) and measurement setting (b)

$$\begin{bmatrix} X_{ki} \\ Y_{ki} \\ Z_{ki} \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} X_i - X_k \\ Y_i - Y_k \\ Z_i - Z_k \end{bmatrix} \quad (1)$$

图2为在第 k 测站中,点 i 与测站坐标系的几何关系。

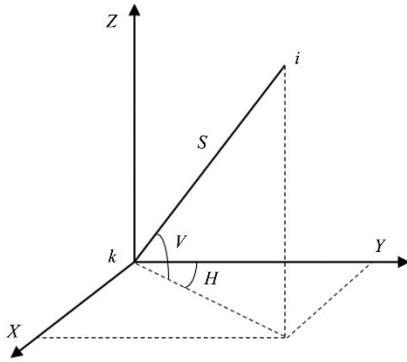


图2 测量点与测站坐标系的几何关系

Fig.2 The geometric relationship between a measuring point and the station coordinate system

列写第 k 测站中点 i 的观测方程:

$$\begin{cases} S_{ki} = \sqrt{X_{ki}^2 + Y_{ki}^2 + Z_{ki}^2} \\ H_{ki} = \arctan\left(\frac{X_{ki}}{Y_{ki}}\right) \\ V_{ki} = \arctan\left(\frac{Z_{ki}}{\sqrt{X_{ki}^2 + Y_{ki}^2}}\right) \end{cases} \quad (2)$$

式中: S_{ki} 为站点 k 到点 i 的斜距观测值; H_{ki} 为 i 点水平角观测值; V_{ki} 为 i 点垂直角观测值。

将式(1)代入式(2),可得第 k 测站中点 i 观测方程的待求参数:站点坐标 (X_k, Y_k, Z_k) 、矩阵 $\mathbf{M}$ 的角度参数 $(\theta_{xk}, \theta_{yk}, \theta_{zk})$ 、控制点坐标 (X_i, Y_i, Z_i) 。为了便于叙述,将表达测站坐标系位置和姿态的6个参数 (X_k, Y_k, Z_k) 和 $(\theta_{xk}, \theta_{yk}, \theta_{zk})$ 归为测站参数。

对于全部测站控制点的观测方程,待求参数总数为 $6m+3n$,观测方程总数为 $3(n+p)$, p 为搭接测量过程中公共点的重复观测次数。当 p 足够多时,可以保证观测方程个数大于待求参数个数,在给定一

定起算数据的条件下,可以按照最小二乘原理进行求解。

对于所有控制点的观测值,观测方程可抽象为 $\mathbf{L} = f(\bar{\mathbf{X}}) + \Delta$,其中 $\mathbf{L}$ 为观测值; $\bar{\mathbf{X}}$ 为待求参数真值(包括装置坐标系中所有站点、控制点的坐标参数和各测站旋转矩阵的角度参数); Δ 为观测误差。取真值 $\bar{\mathbf{X}}$ 的充分近似值 $\mathbf{X}^0$,令 $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{X}^0 + \hat{\mathbf{x}}$,按泰勒公式线性化展开: $\mathbf{L} - f(\mathbf{X}^0) = \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}} + \Delta$,其中 $\mathbf{B} = \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{\mathbf{X}^0}$,得到误差方程:

$$\mathbf{V} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l} \quad (3)$$

式中: $\mathbf{V}$ 为观测值改正数; $\mathbf{B}$ 为系数矩阵; $\hat{\mathbf{x}}$ 为待求参数近似值改正数; $\mathbf{l} = \mathbf{L} - f(\mathbf{X}^0)$ 为常数项。

由最小二乘平差公式可得:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \quad (4)$$

$\hat{\mathbf{x}}$ 的估值精度协方差阵为:

$$\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}} = \sigma_0^2 (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \quad (5)$$

式中: $\mathbf{P}$ 为观测值的权阵; σ_0 为单位权中误差。

1.3 误差累积传播途径分析

根据分阶段平差理论,分阶段平差与整体平差结果相同^[12]。为了研究误差累积的途径,可以以测站为单位按站分阶段平差。考查第 k 测站数据,按照前述测量方法第 k 测站待求参数可以分成两部分:前期测量过的控制点在装置坐标系中的坐标参数 $\mathbf{X}_1$ 和本站测站参数以及新测量的控制点在装置坐标系中的坐标参数 $\mathbf{X}_2$,其中 $\mathbf{X}_1$ 在第 $k-1$ 次平差后具有了估值 $\hat{\mathbf{X}}_{1k-1}$ 和估值的方差阵 $\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{X}}_{1k-1}}$ 。按照最小二乘配置理论^[13],将 $\mathbf{X}_1$ 第 $k-1$ 次平差结果作为虚拟观测值,并取 $\hat{\mathbf{X}}_{1k-1}$ 为近似值与第 k 次观测值一起平差,误差方程为:

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{X_1} = \hat{\mathbf{X}}_{1k} - \hat{\mathbf{X}}_{1k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{1k} \\ \mathbf{V}_k = \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{x}}_{1k} + \mathbf{A}_2 \hat{\mathbf{x}}_{2k} - \mathbf{l}_k \end{cases} \quad (6)$$

式中: $\mathbf{V}_{X_1}$ 、 $\mathbf{V}_k$ 分别为虚拟观测值和第 k 站观测值的改正数; $\hat{\mathbf{X}}_{1k}$ 为参数 $\mathbf{X}_1$ 的第 k 次平差结果; $\hat{\mathbf{x}}_{1k}$ 、 $\hat{\mathbf{x}}_{2k}$ 为第 k

次平差 X_1 、 X_2 近似值的改正数; A_1 、 A_2 为系数矩阵; l_k 为常数项。

取单位权方差 $\sigma_0^2 = 1$, 则虚拟观测值的权阵 $P_{X_1} = D_{\hat{X}_{1k-1}}^{-1}$, 第 k 测站观测值的权阵 $P_k = D_k^{-1}$, D_k 为第 k 测站观测值的方差阵。

将式(6)整理成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} V_{X_1} \\ V_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{1k} \\ \hat{x}_{2k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ l_k \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\text{令 } V_c = \begin{bmatrix} V_{X_1} \\ V_k \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{c} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{1k} \\ \hat{x}_{2k} \end{bmatrix},$$

$$l_c = \begin{bmatrix} 0 \\ l_k \end{bmatrix}, P_c = \begin{bmatrix} P_{X_1} & 0 \\ 0 & P_k \end{bmatrix}, \text{ 则式(7)变为:}$$

$$V_c = B_c \hat{c} - l_c \quad (8)$$

可见式(8)与式(3)形式相同, 按间接平差计算方法得 $\hat{x}_{2k}$ 的方差阵:

$$D_{\hat{x}_{2k}} = \left\{ A_2^T \left(A_1 D_{\hat{X}_{1k-1}} A_1^T + D_k \right)^{-1} A_2 \right\}^{-1} \quad (9)$$

式(9)为含有累积误差时新测量点的估值方差, 为了剔除累积误差的影响, 单独考查第 k 测站测量数据的平差计算。假设第 k 测站所测量的公共点的真值已知, 以公共点作为已知点平差, 此时式(6)中不再有虚拟观测值的误差方程, 待求参数中没有了公共点的坐标, 系数矩阵 $A_1 = 0$, 其误差方程形式与式(3)相同, 平差计算结果为式(4)和式(5)。

比较以上所述有累积误差和无累积误差两种情况, 对比式(5)和式(9)可见, 式(9)中的系数矩阵 A_2 就相当于式(5)中的系数矩阵 B , $(A_1 D_{\hat{X}_{1k-1}} A_1^T + D_k)^{-1}$ 就相当于式(5)中的观测值权阵 P 。对于第 k 测站, $D_k = \sigma_0^2 P^{-1}$, $A_1 D_{\hat{X}_{1k-1}} A_1^T$ 为对称正定矩阵, 因此含有累积误差的分阶段平差相当于增加了第 k 站的观测误差, 这部分增加的误差来源于 X_1 , 即第 k 站测量的公共点。

对于多站测量情况, 将第 k 测站观测方程分成两部分: 公共点观测方程和新测点观测方程, 对应的误差方程为:

$$\begin{cases} V_1 = A_{11} X_s + A_{12} X_2 - l_1 \\ V_2 = A_{21} X_s + A_{22} X_2 - l_2 \end{cases} \quad (10)$$

式中: V_1 、 V_2 分别为公共点和新测点观测值的改正数; A_{11} 、 A_{12} 、 A_{21} 、 A_{22} 为系数矩阵; X_s 为测站参数; X_1 为公共点参数; X_2 为新测点参数; l_1 、 l_2 为常数项。

可以看到, 公共点和测站参数有函数关系, 测站参数和新测点有函数关系, 累积误差的传播途径是从公共点到测站参数, 再从测站参数到新测点。

2 误差传播特点分析

2.1 跟踪仪测点精度分析

跟踪仪通过测量斜距 S 、水平角 H 、垂直角 V 计算被测点在测站坐标系中的坐标 (X, Y, Z) , 由图2可得函数关系为:

$$\begin{cases} X = S \cos V \sin H \\ Y = S \cos V \cos H \\ Z = S \sin V \end{cases} \quad (11)$$

线性化得到:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} S \\ V \\ H \end{bmatrix} + C_0 \quad (12)$$

其中,

$$F = \begin{bmatrix} \cos V_0 \sin H_0 & -\frac{S_0}{\rho} \sin V_0 \sin H_0 & \frac{S_0}{\rho} \cos V_0 \cos H_0 \\ \cos V_0 \cos H_0 & -\frac{S_0}{\rho} \sin V_0 \cos H_0 & -\frac{S_0}{\rho} \cos V_0 \sin H_0 \\ \sin V_0 & \frac{S_0}{\rho} \cos V_0 & 0 \end{bmatrix};$$

C_0 为常数项; S_0 、 V_0 、 H_0 为近似值; ρ 为弧度与秒之间的转换系数。

由误差传播理论, 被测点坐标的协方差阵为:

$$D_{CC} = \begin{bmatrix} D_{XX} & D_{XY} & D_{XZ} \\ D_{YX} & D_{YY} & D_{YZ} \\ D_{ZX} & D_{ZY} & D_{ZZ} \end{bmatrix} = F D_{LL} F^T \quad (13)$$

被测点 X 向点位测量误差 $m_x = \sqrt{D_{XX}}$, Y 向点位测量误差 $m_y = \sqrt{D_{YY}}$, Z 向点位测量误差 $m_z = \sqrt{D_{ZZ}}$, 综合点位误差 $m_p = \sqrt{D_{XX} + D_{YY} + D_{ZZ}}$ 。

D_{LL} 为边角观测值的方差阵, 杨凡^[14]、杨振^[15]、梁静等^[16]对跟踪仪的测量精度开展过相应研究, 在这里以测距精度 $p_s = 2 \mu\text{m} \cdot \text{m}^{-1}$, 测角精度 $d_h = d_v = 2''$ 为例对跟踪仪测点精度进行分析。假设测站坐标系原点位于仪器中心, XY 为平面方向, Z 为高程方向, 被测点在测站坐标系中的设计坐标为 $(10 \text{ m}, 10 \text{ m}, 10 \text{ m})$, 分别模拟计算了仪器测距误差、测角误差对测点精度的影响, 参数设置和计算结果见表1。

计算结果显示: 影响跟踪仪测点精度的主要因素是测角误差, 其中垂直角测量误差的影响大于水平角测量误差的影响。在各向距离和测角精度设置相同的情况下, 跟踪仪的高程测量误差大于平面方向测量误差, 这是由坐标的计算模型固有特点造成的。文献[17]研究表明, 跟踪仪的垂直角测量误差大于水平角, 在这种情况下会进一步放大跟踪仪在 X 、 Y 、 Z 方向上的测量误差, 其中高程方向测量误差放大尤为明显。

表1 跟踪仪边角测量误差对测点精度的影响
Table 1 The influence of laser tracker distance and angle measurement errors on measuring point accuracy

测距精度 Ranging accuracy / $\mu\text{m}\cdot\text{m}^{-1}$	水平角精度 Horizontal angle accuracy / (")	垂直角精度 Vertical angle accuracy / (")	X向误差 X error / mm	Y向误差 Y error / mm	Z向误差 Z error / mm	综合误差 Combined error / mm
2	0	0	0.02	0.02	0.02	0.034 6
0	2	0	0.097	0.097	0	0.137 1
0	0	2	0.068 6	0.068 6	0.137 1	0.167 9
0	2	2	0.118 8	0.118 8	0.137 1	0.216 8
2	2	2	0.120 4	0.120 4	0.138 6	0.219 6
2	2	3	0.142 8	0.142 8	0.206 7	0.288 9

加速器隧道通常为沿束流走向的细长廊道形状,假设测站坐标系的 XY 为平面方向, Z 为高程方向, Y 轴指向束流方向, X 轴垂直于束流方向。在这

种环境中绝大部分被测点与仪器之间的位置关系都是 Y 向距离大于 X 向和 Z 向距离,跟踪仪测量精度会受到控制点空间几何分布的影响。由式(13)可得:

$$\begin{cases} D_{XX} = \left[d_s^2 \cos^2 V + S^2 \left(\frac{d_v}{\rho} \right)^2 \sin^2 V \right] \sin^2 H + S^2 \left(\frac{d_h}{\rho} \right)^2 \cos^2 V \cos^2 H \\ D_{YY} = \left[d_s^2 \cos^2 V + S^2 \left(\frac{d_v}{\rho} \right)^2 \sin^2 V \right] \cos^2 H + S^2 \left(\frac{d_h}{\rho} \right)^2 \cos^2 V \sin^2 H \end{cases} \quad (14)$$

其中 $d_s = Sp_s$ 。

$D_{XX} - D_{YY} =$

$$\left[d_s^2 \cos^2 V + S^2 \left(\frac{d_v}{\rho} \right)^2 \sin^2 V - S^2 \left(\frac{d_h}{\rho} \right)^2 \cos^2 V \right] (\sin^2 H - \cos^2 H) \quad (15)$$

由式(2)可知,当 $Y > X$ 时,式(15)中 $\sin^2 H - \cos^2 H < 0$ 。

令

$$f(S, V) = d_s^2 \cos^2 V + S^2 \left(\frac{d_v}{\rho} \right)^2 \sin^2 V - S^2 \left(\frac{d_h}{\rho} \right)^2 \cos^2 V$$

其为一关于变量 S 和 V 的函数,对于狭长形的加速器隧道控制网,其控制点在高程方向距测站坐标系原点一般小于2 m,即 $V < \arcsin(2/S)$,为了便于分析问题,将 $V = \arcsin(2/S)$ 代入 $f(S, V)$,并设置 $p_s = 2 \mu\text{m}\cdot\text{m}^{-1}$, $d_h = 2''$, $d_v = 3''$,计算不同 S 值时 $f(S, V)$ 的值,计算结果见表2。

可以看到,随着测量距离增加,垂直角 V 范围逐渐变小, $f(S, V)$ 也随之变小,测量距离大于某一临界

表2 测量距离与 $f(S, V)$ 的关系
Table 2 Relationship between the measuring distance and $f(S, V)$

距离 Distance / m	$f(S, V)$ / m
3	3.96×10^{-10}
4	-2.34×10^{-10}
5	-1.04×10^{-9}
6	-2.03×10^{-9}

值后 $f(S, V)$ 变为负值。由以上分析可知,在狭长环境中当测量距离超过某一临界值时 $D_{XX} - D_{YY} > 0$,即跟踪仪 X 向测量误差大于 Y 向测量误差。

2.2 跟踪仪测网定位定向精度分析

测量加速器控制网时,依靠公共点传递测站之间的空间几何位置关系。按照误差累积传播途径,需要研究根据公共点观测值计算测站坐标系在控制网坐标系中的位置和姿态的定位和定向误差。采用模拟计算方法,根据前述加速器隧道网的布设方式设计控制网坐标。假设每段4个控制点,段间距6 m,仪器置于两段控制网中间,向两边测量控制网,测距精度 $2 \mu\text{m}\cdot\text{m}^{-1}$,水平角精度 $2''$,垂直角精度 $3''$,测量方式和坐标系方向见图3。以控制点的设计值为已知值,按照前述三维平差模型和式(5)计算跟踪仪测量2~8段控制网时站点坐标 (X_k, Y_k, Z_k) 和姿态

参数 $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ 的协方差阵 $\begin{bmatrix} D_{XX} & D_{XY} & D_{XZ} \\ D_{YX} & D_{YY} & D_{YZ} \\ D_{ZX} & D_{ZY} & D_{ZZ} \end{bmatrix}$ 和

$\begin{bmatrix} D_{\theta_{XX}} & D_{\theta_{XY}} & D_{\theta_{XZ}} \\ D_{\theta_{YX}} & D_{\theta_{YY}} & D_{\theta_{YZ}} \\ D_{\theta_{ZX}} & D_{\theta_{ZY}} & D_{\theta_{ZZ}} \end{bmatrix}$,则测站坐标系的定位误差为:

$m_x = \sqrt{D_{XX}}$ 、 $m_y = \sqrt{D_{YY}}$ 、 $m_z = \sqrt{D_{ZZ}}$,综合定位误差

$m_p = \sqrt{D_{XX} + D_{YY} + D_{ZZ}}$;定向误差为: $m_{\theta_x} = \sqrt{D_{\theta_{XX}}}$ 、

$m_{\theta_y} = \sqrt{D_{\theta_{YY}}}$ 、 $m_{\theta_z} = \sqrt{D_{\theta_{ZZ}}}$,综合定向误差 $m_{\theta} =$

$\sqrt{D_{\theta_{XX}} + D_{\theta_{YY}} + D_{\theta_{ZZ}}}$ 。

测站坐标系定位、定向误差计算结果如图4所示。

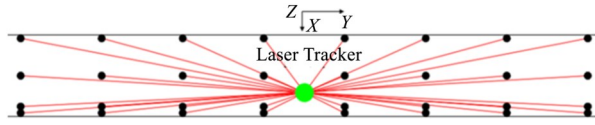


图3 跟踪仪测量控制网俯视图
Fig.3 Top view of measuring the control network with laser tracker

可以看到,仪器测量4段控制网相比测量两段控制网的定位定向精度有明显提高,之后随着测网

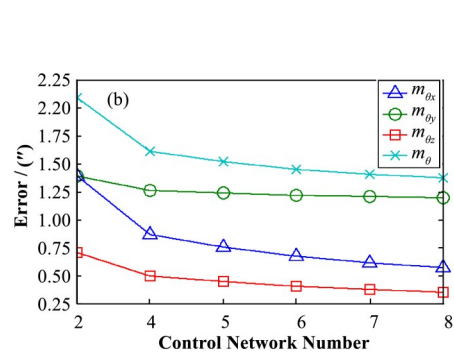
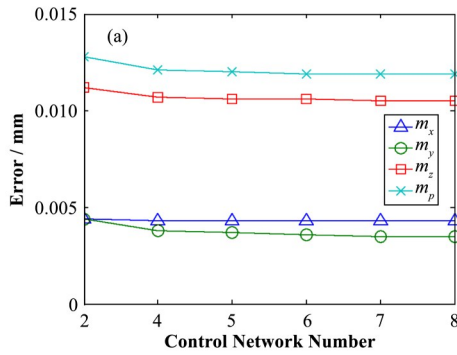


图4 测站坐标系定位(a)和定向误差(b)
Fig.4 Location (a) and orientation errors (b) of station coordinate system

2.3 测站坐标系定位、定向误差对测点精度的影响

由式(1)可知,控制点坐标的平差值($\hat{X}_i, \hat{Y}_i, \hat{Z}_i$)与其坐标观测值平差值($\hat{X}_{ki}, \hat{Y}_{ki}, \hat{Z}_{ki}$)和测站参数平差值($\hat{X}_k, \hat{Y}_k, \hat{Z}_k$), ($\hat{\theta}_{xk}, \hat{\theta}_{yk}, \hat{\theta}_{zk}$)的函数关系为:

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_i \\ \hat{Y}_i \\ \hat{Z}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_k \\ \hat{Y}_k \\ \hat{Z}_k \end{bmatrix} + M^{-1}(\hat{\theta}_{xk}, \hat{\theta}_{yk}, \hat{\theta}_{zk}) \begin{bmatrix} \hat{X}_{ki} \\ \hat{Y}_{ki} \\ \hat{Z}_{ki} \end{bmatrix} \quad (16)$$

当假设控制点坐标观测值(X_{ki}, Y_{ki}, Z_{ki})无误差,仅考虑测站参数误差时对其线性化得到:

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_i \\ \hat{Y}_i \\ \hat{Z}_i \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} \hat{X}_k \\ \hat{Y}_k \\ \hat{Z}_k \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{xk} \\ \hat{\theta}_{yk} \\ \hat{\theta}_{zk} \end{bmatrix} + C_0 \quad (17)$$

式中: I 为单位矩阵; A 为系数矩阵; C_0 为常数项。

由误差传播公式得控制点坐标($\hat{X}_i, \hat{Y}_i, \hat{Z}_i$)的误差协方差阵:

$$D_{cc} = D_{kk} + D_{k\theta} A^T + A D_{\theta k} + A D_{\theta\theta} A^T \quad (18)$$

式中: D_{kk} 为($\hat{X}_k, \hat{Y}_k, \hat{Z}_k$)的协方差阵; $D_{k\theta}$ 和 $D_{\theta k}$ 分别为($\hat{X}_k, \hat{Y}_k, \hat{Z}_k$)和($\hat{\theta}_{xk}, \hat{\theta}_{yk}, \hat{\theta}_{zk}$)的互协方差阵; $D_{\theta\theta}$ 为($\hat{\theta}_{xk}, \hat{\theta}_{yk}, \hat{\theta}_{zk}$)的协方差阵。

段数增加,测站定位精度几乎没有提高,定向精度会有略微提高。由图4(a)可以看到,测站高程方向定位误差比平面方向定位误差大一倍多,总体来说,三个方向的定位误差都不大。由图4(b)可以看到,测站定向参数中绕Z轴的转动角 θ_z 误差最小, θ_x 次之, θ_y 最大。 θ_z 影响测量点的X、Y向精度, θ_x 影响测量点的Y向和Z向精度。 θ_y 影响测量点的X向和Z向精度,因此,测点精度受仪器测网定向误差影响最大的是Z向,其次是X向和Y向。

由于式(18)较为复杂,故采用模拟计算方法分析测站坐标系定位、定向误差对测点精度的影响。在§2.2中跟踪仪向左右两边各测量两段控制网得到:

$$D_{kk} = \begin{bmatrix} 1.8496 \times 10^{-5} & -1.3106 \times 10^{-20} & 5.5764 \times 10^{-21} \\ -1.2864 \times 10^{-20} & 1.4126 \times 10^{-5} & -3.4396 \times 10^{-21} \\ 6.2653 \times 10^{-21} & -5.0356 \times 10^{-21} & 1.1439 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$D_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} 0.7591 & -1.3293 \times 10^{-16} & 3.5843 \times 10^{-17} \\ -4.8227 \times 10^{-17} & 1.5926 & 1.3209 \times 10^{-16} \\ -6.1488 \times 10^{-18} & 1.0853 \times 10^{-16} & 0.2500 \end{bmatrix}$$

由式(18)可知,当测站定向无误差,即 $D_{k\theta} = D_{\theta k} = D_{\theta\theta} = 0$ 时,测站定位误差对测点精度的影响为 $m_x=0.0043$ mm, $m_y=0.0038$ mm, $m_z=0.0107$ mm, $m_p=0.012$ mm,且该误差与测量点的位置无关;当测站定位无误差,即 $D_{k\theta} = D_{\theta k} = D_{kk} = 0$ 时,测量点误差协方差阵 $D_{cc} = A D_{\theta\theta} A^T$,是一个与测量点位置有关的函数。为剔除各向异性,令测站坐标系中测量点坐标 $X_{ki} = Y_{ki} = Z_{ki} = S$,分别计算了 S 为不同数值时测站定向误差对测点精度的影响,计算结果如图5所示。

图5中, m_q 为测站坐标系既有定位误差又有定向误差时的测点综合误差, m_x, m_y, m_z, m_p 为仅有定向误差时测量点的X、Y、Z向误差和综合点位误差。可以看到,在单站测量中随着测量距离的增加,跟踪仪

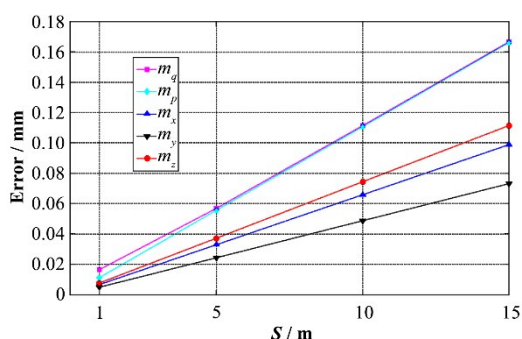


图5 测站坐标系定向误差对测点精度的影响

Fig.5 The influence of orientation error of station coordinate system on measuring point accuracy

测网的定位误差对测量点精度的影响要远小于定向误差,在不考虑仪器本身测点误差的情况下,测站坐标系的定向误差是误差传播的主要途径。测量点精度受影响最大的是高程 Z 其次是横向 X ,纵向 Y 受影响最小。

3 实验验证

前面分析了加速器环境中控制网测量的误差累

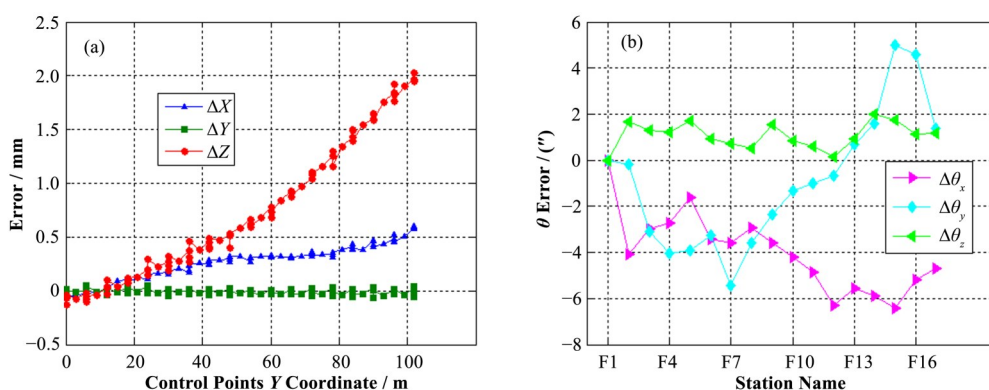


图6 控制网三维平差模拟计算 (a) 控制网和站点坐标误差,(b) 测站姿态误差

Fig.6 Simulation calculation of three dimensional adjustment of control network

(a) Control network and station coordinate error, (b) Station orientation error

可以看到,对于102 m长直线加速器控制网三维平差,点位纵向(Y)坐标误差最小,高程(Z)坐标误差最大,且高程和横向坐标误差随着测站数目的增多呈累积递增形式,这与前面分析的误差累积传播特点完全一致。测站坐标系姿态误差与点位坐标误差分布不同, θ_x 、 θ_y 、 θ_z 呈随机分布形式,但是 θ_z 误差较小且比较稳定, θ_x 和 θ_y 误差较大且离散性较大,其中 θ_y 变化最大,最大值与最小值相差达 $10''$ 以上,与前面特点分析相符。

考虑到控制点和站点位置误差呈现出明显的累积增长效果,实验对站点位置进行约束的三维平差。依然采用模拟计算的方法,将站点坐标设计值作为

积传播途径和误差传播特点,但是其仅对单站测量的情况从估值中误差的角度进行了分析,对于多站测量平差结果相对于真值的误差传播特点是否符合前述分析需要通过实验进行验证。

现实测量总是带有误差的,因此控制网的真值无法得到。采用模拟计算的方法,以控制网的设计值作为真值,以模拟测量值作为跟踪仪的观测值,采用三维平差方法进行计算,可以比较平差结果相对于真值的误差。控制网设计如下:控制网沿6 m宽直线隧道分段布设,每段4个控制点如图1所示,相邻段之间距离6 m,一共18段总长102 m。跟踪仪采用转站搭接的测量方式,依次在两段之间设站共测17站,每站前测三段后测三段控制网。参照控制网优化设计常用的模拟法^[18],采用蒙特卡罗方法^[12]按测距固定误差0.015 mm,测距比例误差 $2 \mu\text{m} \cdot \text{m}^{-1}$, $d_h=2''$, $d_v=3''$ 的边角观测精度生成跟踪仪每站的模拟观测值。控制点和测站参数的三维平差结果如图6所示, ΔX 、 ΔY 、 ΔZ 、 $\Delta\theta_x$ 、 $\Delta\theta_y$ 、 $\Delta\theta_z$ 为平差值与设计值之差。

已知值代入平差计算,即假设站点 X 、 Y 、 Z 坐标已知,平差结果如图7(a)所示。添加位置约束后三维平差结果已经难以看到误差累积现象,平差精度优于单站测量精度。由此可知,如果能够为三维平差提供高精度的点位坐标约束,三维平差可以取得非常好的平差结果。

测站坐标系姿态误差是单站测量中误差传播的重要途径,实验对测站坐标系姿态进行约束的平差效果。采用模拟计算方法,将测站坐标系 θ_x 、 θ_y 、 θ_z 的设计值作为已知值代入三维平差,即假定测站坐标系的姿态已知,平差结果如图7(b)所示。对测站坐标系姿态进行约束后平差误差累积现象同样得到大

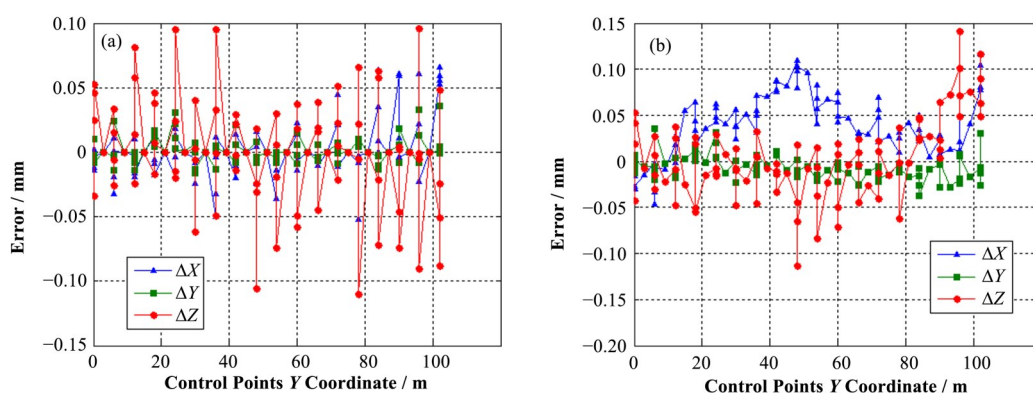


图7 定位(a)、定向(b)约束的三维平差
Fig.7 Location (a) and orientation (b) constrained three dimensional adjustment

幅消减,并且取得了和站点位置约束平差相近的坐标精度。

4 结语

在加速器狭长隧道测量环境中,用跟踪仪转站搭接测量控制网进行无约束的三维平差会产生严重的误差累积现象。误差的根本来源是跟踪仪的边、角测量误差,误差累积传播途径是从公共点误差到测站坐标系参数误差,再从测站坐标系参数误差到测量点误差。误差传播的特点是高程误差>横向误差>纵向误差,这是由跟踪仪本身的坐标测量模型,垂直角观测精度低于水平角观测精度,隧道狭长的几何环境等一系列因素引起的。在跟踪仪单站测量中测站坐标系的姿态误差是误差传播的一个主要途径,但是对于多站搭接测量,站点的位置误差会呈现出明显的累积效果,即测站坐标系位置误差会累积前面各测站的测量误差,从而造成随着测站数的增多,站点误差不断变大,三维平差结果越发扭曲严重。实验表明:为三维平差提供高精度的点位坐标约束可以有效抑制误差累积,为测站坐标系提供高精度的姿态约束同样可以取得抑制误差累积的效果。本文研究成果可为三维平差误差累积控制研究提供解决思路和有益借鉴。

参考文献

- 1 秦庆. 高能同步辐射光源初步设计报告[R]. 北京: 中国科学院高能物理研究所, 2015.
QIN Qing. High energy photon source preliminary design report[R]. Beijing: Institute of High Energy Physics, Chinese Academy of Sciences, 2015.
- 2 吴迪军, 蒋志强, 熊伟, 等. 硬X射线自由电子激光装置一级平面控制网模拟测量[J]. 工程勘察, 2020, 48(10): 47 - 52.

WU Dijun, JIANG Zhiqiang, XIONG Wei, *et al.* Simulation survey of the first level horizontal control network of Shanghai high repetition rate XFEL and extreme light facility[J]. Geotechnical Investigation & Surveying, 2020, 48(10): 47 - 52.

- 3 姜晓明, 王九庆, 秦庆, 等. 中国高能同步辐射光源及其验证装置工程[J]. 中国科学 (物理学 力学 天文学), 2014, 44(10): 1075 - 1094. DOI: 10.1360/SSPMA2014-00158.
JIANG Xiaoming, WANG Jiuqing, QIN Qing, *et al.* Chinese high energy photon source and the test facility[J]. Scientia Sinica (Physica, Mechanica & Astronomica), 2014, 44(10): 1075 - 1094. DOI: 10.1360/SSPMA2014-00158.
- 4 俞成. 波荡器磁中心高精度标定的技术研究[D]. 北京: 中国科学院大学, 2018.
YU Cheng. Research on the high precision fiducialization of the magnetic center of an undulator[D]. Beijing: University of Chinese Academy of Sciences, 2018.
- 5 何晓业, 王巍, 汪鹏, 等. 合肥光源升级改造准直控制网方案设计及实施[J]. 核技术, 2013, 36(10): 100102. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2013.hjs.36.100102.
HE Xiaoye, WANG Wei, WANG Peng, *et al.* Alignment control network scheme design and measurement of HLS upgrade[J]. Nuclear Techniques, 2013, 36(10): 100102. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2013.hjs.36.100102.
- 6 柯志勇, 何振强, 董岚, 等. BEPCII储存环准直测量点位误差分析[J]. 核技术, 2015, 38(1): 010101. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2015.hjs.38.010101.
KE Zhiyong, HE Zhenqiang, DONG Lan, *et al.* Analysis on alignment position error of BEPC II storage ring[J]. Nuclear Techniques, 2015, 38(1): 010101. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2015.hjs.38.010101.
- 7 马娜, 董岚, 梁静, 等. 中国散裂中子源直线加速器控制

- 网测量及精度研究[J]. 测绘通报, 2016, (1): 104 - 107. DOI: 10.13474/j.cnki.11-2246.2016.0026.
- MA Na, DONG Lan, LIANG Jing, *et al.* Measurement and research of control network's accuracy of CSNS linear accelerator[J]. Bulletin of Surveying and Mapping, 2016, (1): 104 - 107. DOI: 10.13474/j.cnki.11-2246.2016.0026.
- 8 薄志鹏. 三维大地测量概论[J]. 武测资料, 1981, (Z1): 31-44. DOI: 10.14188/j.2095-6045.1981.zl.005.
- BO Zhipeng. Introduction to three-dimensional geodesy [J]. Journal of Geomatics, 1981, (Z1): 31 - 44. DOI: 10.14188/j.2095-6045.1981.zl.005.
- 9 何永军, 刘成龙, 杨雪峰, 等. 高铁轨道基准网三维构网测量及其平差方法[J]. 测绘科学技术学报, 2012, **29**(1): 20 - 23. DOI: 10.3969/j.issn.1673-6338.2012.01.006.
- HE Yongjun, LIU Chenglong, YANG Xuefeng, *et al.* Three-dimensional network measurement and adjustment method for high-speed railway track reference network[J]. Journal of Geomatics Science and Technology, 2012, **29** (1): 20 - 23. DOI: 10.3969/j.issn.1673-6338.2012.01.006.
- 10 郭迎钢, 李宗春, 赵文斌, 等. 激光跟踪仪三维导线在加速器控制网测量中的应用[C]. 第六届全国粒子加速器准直安装及机械设计学术研讨会, 昆明, 2019.
- GUO Yinggang, LI Zongchun, ZHAO Wenbin, *et al.* Application of laser tracker three-dimensional traverse in measurement of accelerator control network[C]. The 6th National Symposium on Alignment Installation and Mechanical Design of Particle Accelerators, Kunming, 2019.
- 11 李方, 邹进贵, 王铜, 等. 粒子直线加速器精密三维控制网研究[J]. 地理空间信息, 2018, **16**(2): 87-89+110+12. DOI: 10.3969/j.issn.1672-4623.2018.02.029.
- LI Fang, ZOU Jingui, WANG Tong, *et al.* Study on linac precise three dimensional control network[J]. Geospatial Information, 2018, **16**(2): 87-89+110+12. DOI: 10.3969/j.issn.1672-4623.2018.02.029.
- 12 黄维彬. 近代平差理论及其应用[M]. 北京: 解放军出版社, 1992.
- HUANG Weibin. Modern adjustment theory and its application[M]. Beijing: Publishing House of PLA, 1992.
- 13 崔希璋. 广义测量平差[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2009.
- CUI Xizhang. General surveying alignment[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2009.
- 14 杨凡. 高能粒子加速器工程精密测量研究[D]. 郑州: 解放军信息工程大学, 2011.
- YANG Fan. Research on precise survey of high energy particle accelerator project[D]. Zhengzhou: PLA Information Engineering University, 2011.
- 15 杨振. 激光跟踪仪高精度位姿测量技术研究[D]. 郑州: 战略支援部队信息工程大学, 2018.
- YANG Zhen. Study of high-precision position & pose measurement technique based on laser tracker[D]. Zhengzhou: PLA Strategic Support Force Information Engineering University, 2018.
- 16 梁静, 董岚, 罗涛, 等. BEPCII 储存环激光跟踪仪测量精度统计及先验误差的确定[J]. 测绘科学, 2013, **38**(6): 182 - 184. DOI: 10.16251/j.cnki.1009-2307.2013.06.026.
- LIANG Jing, DONG Lan, LUO Tao, *et al.* Precision statistics of laser tracker in BEPCII storage ring and calculation of mean square error of unit weight[J]. Science of Surveying and Mapping, 2013, **38**(6): 182 - 184. DOI: 10.16251/j.cnki.1009-2307.2013.06.026.
- 17 范百兴. 激光跟踪仪高精度坐标测量技术研究与实践[D]. 郑州: 解放军信息工程大学, 2013.
- FAN Baixing. Research and realization of the high precision coordinate measurement technique using laser tracker[D]. Zhengzhou: PLA Information Engineering University, 2013.
- 18 文学. 基于模拟法优化设计的工程控制网施测方法实践[J]. 测绘与空间地理信息, 2014, **37**(4): 186-189.
- WEN Xue. The practice of method of the engineering control network based on the simulation optimization design[J]. Geomatics & Spatial Information Technology, 2014, **37**(4): 186-189.